УДК 551.584

Т.А. Белый

ЛОКАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА ЭНТРОПИИ И ТРАНСФОРМАЦИЯ ЭНЕРГИИ ВНУТРИ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО КОНТИНУУМА НА ПРИМЕРЕ СКОРОСТИ ПЕРЕСТРОЙКИ ТЕНЗОРА ДЕФОРМАЦИИ

Изложены теоретические основы второго начала термодинамики применительно к климатообразующим процессам в планетарной атмосфере. Отличия планетарных процессов от молекулярных существенно изменяют принцип второго начала термодинамики и рассматривают понятие энтропии в качестве функции организации перестроек климата.

Введение

В настоящее время проблема изменения климата является наиболее острой и первостепенной задачей во всем мире. Глобальное изменение климата за последнее десятилетие заняло прочное место в ряду главных глобальных экологических проблем, стоящих перед мировым сообществом.

Еще в 1824 году Карно доказал, что генерация конвективных потоков в облаках сопоставима с производством механической работы паровоза. С того времени второй закон термодинамики был применен к различным проблемам в метеорологии: общая циркуляция атмосферы, радиационный перенос тепла, динамика ураганов, пыльные бури, влажные конвекции и т. д.

Клаузис сформулировал второй закон термодинамики в следующем виде:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} + \Delta S_{irr},$$

$$\Delta S_{irr} \geq 0,$$

где ΔS – изменение энтропии, связанное с физической трансформацией; Q – внешний нагрев; T – температура системы; ΔS_{irr} – необратимое производство энтропии.

С термодинамической точки зрения атмосфера является тепловой машиной, превращающей тепло в механическую энергию. Эта механическая энергия в результате турбулентной и вязкой диссипации, а также других необратимых процессов снова превращается в тепло.

Если рассмотреть баланс энтропии этого процесса, окажется, что внешнее нагревание на поверхности происходит при большей температуре, чем охлаждение в верхних слоях атмосферы. Поэтому количество энтропии уменьшается. То есть, солнечное нагревание вместе с радиационным охлаждением являются отрицательным источником энтропии, или, как иногда говорят, источником негэнтропии. Необратимые процессы, наоборот, увеличивают энтропию, являясь ее положительными источниками.

В среднем по времени сохраняется баланс, отрицательный и положительный источники компенсируются.

Если отрицательный источник энтропии можно достаточно надежно определить с помощью современных моделей циркуляции атмосферы, то положительные источники недостаточно достоверны, поскольку в моделях мелкомасштабные процессы, связанные с диссипацией параметризуются, а не описываются явно.

Так как атмосфера является открытой системой, через которую прокачивается энергия, энергия и энтропия атмосферы в конкретный момент времени не обязаны сохраняться. Вся атмосфера в целом может накопить или потерять на какой-то промежуток времени как энергию, так и энтропию. Увеличение энергии будет означать или нагревание атмосферы, или увеличение кинетической энергии циркуляции, или увеличение доступной потенциальной энергии. Увеличение же энтропии будет означать повышение степени упорядоченности процессов атмосферной циркуляции, например, преобладание зонального типа над меридиональным. Энтропия может оказаться важным параметром для анализа, интерпретации и понимания низкочастотных процессов в атмосфере с временными масштабами от 10 суток до десятилетий.

В последнее время зарубежными авторами большое внимание уделяется детальному расчету бюджета энтропии при локальном радиационно-конвективном равновесии с использованием реалистичных моделей облачности.

Так в работах [1, 2] показано, что дифференциальный нагрев атмосферы, происходящий в результате конвергенции турбулентных потоков тепла в нижних слоях и при радиационном выхолаживании тропосферы в верхних слоях, приводит к уменьшению энтропии. Этот процесс уравновешивается производством энтропии благодаря таким необратимым процессам, как вязкая диссипация, диффузия тепла, диффузия водяного пара и необратимым фазам перехода воды в атмосфере.

По этому вопросу высказываются противоположные гипотезы о положительных необратимых источниках энтропии. Считается, что основной необратимый источник энтропии - это турбулентный каскад и окончательная вязкая диссипация, происходящие в конвективных ячейках в восходящих и нисходящих движениях воздуха.

Чтоб объединить различные энтропийные задачи в едином русле, нужно рассмотреть их с помощью классической теории поля. В этом случае удобно рассмотреть атмосферу и ее объекты (составляющие) в качестве многокомпонентного термодинамического континуума. Поэтому за основу классической теории поля используем подход, подробно изложенный в монографии [4]. А уже от него мы перейдем к понятиям и уравнениям, используемым в метеорологии.

В общем виде уравнение локального баланса энтропии для сплошной среды с учетом неравновесных термодинамических процессов [4] запишем так:

$$\left[\rho \dot{s} + \nabla \cdot \mathbf{J}_s - (\Psi + \Phi)\right] = \left\{\sigma(\mathbf{J}, \mathbf{X}) - \left[\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + \Phi(\mathbf{J}, \mathbf{J})\right]\right\}, \tag{1}$$

где s – энтропия; $\mathbf{J}$ – потоки между субстанциями континуума; $\mathbf{X}$ – силы, формирующие эти потоки; Ψ, Φ – потенциалы рассеяния энергии; $\mathbf{J}_s$ – приток энтропии; ρ – плотность среды; σ – производство энтропии.

Чтобы применить его к атмосфере, нужно переписать его в обозначениях, принятых в атмосферных науках. В результате получится уравнение баланса энтропии, в котором положительными источниками энтропии являются четыре основных необратимых процесса: вязкость, теплопроводность, диффузия воды и фазовые переходы воды.

Как показано в работах [3, 7], уравнение (1) определяет баланс энтропии для каждого элемента континуума. Полный баланс энтропии будет состоять из суммы балансов всех элементов континуума.

Представим уравнение производства энтропии в следующем виде [4]:

$$T\sigma = \sum_{j=1}^{R} J_j A_j^* + \mathbf{J}_q \cdot \mathbf{X}_q^* + \sum_{k=1}^{K} \mathbf{J}_k \cdot \mathbf{X}_k^* + p^v X_v^* + \overset{0}{\mathbf{P}}{}^{vs} : \overset{0}{\mathbf{X}}{}_v^{s^*} + \mathbf{P}^{va} \cdot \mathbf{X}_v^{a^*},$$

где T – температура системы; A_j^*, J_j – скорость потоков фазовых переходов; $\mathbf{X}_q^*$ – термодинамическая сила, обусловленная конвективной теплопроводностью; $\mathbf{J}_q$ – полярный вектор потока тепла; $\mathbf{X}_k^*$ – термодинамические силы турбулентной диффузии; $\mathbf{J}_k$ – плотность потока турбулентной диффузии; X_v^* – скалярная сила вязкости; p^v – вязкое давление; $\overset{0}{\mathbf{X}}{}_v^{s*}$ – тензорная сила вязкости; $\overset{0}{\mathbf{P}}{}^{vs}$ – симметричная часть тензора вязкого давления второго ранга; $\mathbf{X}_v^a$ – термодинамическая сила, вызывающая необратимый процесс; $\mathbf{P}^{va}$ – антисимметричная часть тензора вязкого давления. Символ (:) означает операцию двойного сворачивания результата тензорного произведения на уровень скалярной величины – дивергенции.

Символом (*) отмечены термодинамические силы.

Производство энтропии определяет количество энергии, рассеиваемой в единице объема в единицу времени в многокомпонентных гидротермодинамических системах, если в них происходят неравновесные процессы. Клаузис назвал ее некомпенсированным теплом. Рассеяние энергии σT - это положительно определенная величина, которая является локальной мерой неравновесности и определяется адекватным набором термодинамических потоков и соответствующих сил.

При полном термодинамическом равновесии производство энтропии равно нулю, и таким образом, независимые компоненты скалярных сил и сопряженные с ними компоненты скалярных потоков одновременно также обращаются в нуль. Это условие, а также наиболее общая связь между независимыми потоками и силами выражаются в линейном приближении с помощью линейных кинематических конститутивных уравнений (законов) Онсагера.

Метод решения

Рассматривая локальное уравнение субстанционального баланса энтропии применительно к термодинамическому континууму планетарной атмосферы, нужно учитывать, что процессы с «отрицательной» вязкостью (процессы, передающие энергию от мелких возмущений к крупным,) могут играть определяющую роль.

Описывая процессы с «отрицательной» вязкостью уравнением (1), при длительном интегрировании, модульное значение правой части существенно увеличивается и может менять знак за счет слишком большого увеличения потенциалов рассеяния Ψ, Φ над производством энтропии σ. Это позволяет уравнению (1) предвычислять снижение энтропии.

При слишком большом снижении энтропии потенциалы рассеяния Ψ, Φ, превращаясь в определенных спектральных интервалах в потенциалы приобретения, уменьшают слишком резкое снижение энтропии. Следовательно, уравнение (1) в своей основе содержит только функции рассеяния энергии, что приводит производство энтропии к величине минимального возрастания:

$$\sigma - \left(\Psi + \Phi\right) = \max .$$

Запишем потенциалы рассеяния и производство энтропии, определив их через вектора сил и потоков, действующих в континууме:

$$\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{X}) \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,k}^{f} L_{ik} X_i X_k ; \qquad \Phi(\mathbf{J}, \mathbf{J}) \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,k}^{f} R_{ik} J_i J_k ,$$

$$\sigma = \sum_{i,k=1}^{f} L_{ik} X_i X_k = \sum_{i,k=1}^{f} R_{ik} J_i J_k \geq 0 ,$$

где L_{ik} – коэффициенты проводимости; R_{ik} – коэффициенты сопротивления.

Для применения уравнения (1) в практике задач теории климата его нужно преобразовать, применяя методы спектрального анализа векторных и тензорных полей. Поэтому при использовании потенциалов рассеяния Ψ, Φ в задачах теории климата их расчетные формулы заменяются спектральными аналогами, что позволяет термодинамический континуум выразить энергетическими модами сферических волн.

Термодинамический континуум планетарной атмосферы может быть представлен энергетическими модами сферических волн, которые охватывают всю сферу земного шара. Он формируется из субстанционального уравнения баланса энтропии (1), выражаясь через потенциалы рассеяния Ψ, Φ и производство энтропии σ, в котором неизвестные функции будут коэффициенты разложения по обобщенным сферическим функциям.

Основы спектрального подхода к описанию термодинамического континуума планетарной атмосферы базируются на базисной системе обобщенных сферических функций T_{mn}^{l} [5].

Обобщенные сферические функции T_{mn}^{l} определенных наборов по индексу m составляют полные ортогональные системы функций в пространстве функций с интегрируемым квадратом. Разложения метеорологических полей по обобщенным сферическим функциям согласно [5, 6] применяются при решении задач теории климата, гидродинамического прогноза погоды и при спектральном анализе векторных полей ветра и тензорных полей турбулентных напряжений.

В виду того, что обобщенные сферические функции применимы к инвариантным относительно вращений полям, любой метеорологический элемент следует разлагать в ряды по соответствующим наборам обобщенных сферических функций:

$$T_{mn}^{l} = e^{-in\varphi} P_{mn}^{l}(\cos\theta),$$

где φ – азимутальный угол, соответствующий долготе точки на сфере; θ – угол дополнения широты, отсчитываемый от северного полюса к южному полюсу через экватор. Волновой вектор (l,n) задает количество сферических волн по меридиану между полюсами и по кругу широты. Индекс m определяет номер набора обобщенных функций каждой компоненте вектора или тензора. Обязательным условием для каждой компоненты вектора или тензора является ее инвариантность относительно вращений сферы.

Пусть T_{mn}^{l} есть система обобщенных сферических функций. Тогда согласно [8] при энергетическом взаимодействии сферических волн происходит их триплетное разделение, которое можно параметризовать формулой умножения базисных обобщенных сферических функций T_{mn}^{l}:

$$T_{mn}^{l} T_{ps}^{k} = \sum_{v=|k-l|}^{k+l} C_{m,p,m+p}^{l,k,v} C_{n,s,n+s}^{l,k,v} T_{m+p,n+s}^{v}, \qquad (2)$$

где $C_{m,p,m+p}^{l,k,v}$, $C_{n,s,n+s}^{l,k,v}$ – коэффициенты Клебша-Гордона.

Таким образом, энергетическое взаимодействие двух сферических волн порождает серию триплетов во всем диапазоне спектрального интервала, а комбинации коэффициентов Клебша-Гордона определяют их энергетическое состояние.

Например:

$$A_{l,n} T_{mn}^{l} B_{l,n} T_{ps}^{k} = \sum_{v=|k-l|}^{k+l} A_{l,n} B_{l,n} C_{m,p,m+p}^{l,k,v} C_{n,s,n+s}^{l,k,v} T_{m+p,n+s}^{v}.$$

Если $A_{l,n}$ и $B_{l,n}$ – энергетические моды волн, вступивших во взаимодействие, то $A_{l,n}B_{l,n}C_{m,p,m+p}^{l,k,v}\,C_{n,s,n+s}^{l,k,v}$ – энергетическое содержание результирующих волн триплетов волнового взаимодействия.

Приводя потенциалы рассеяния Ψ,Φ к спектральному виду, их нужно преобразовать к форме инвариантной относительно вращения сферы. Т.е., если вектор **X** привести к форме инвариантной относительно вращения сферы, то его компоненты запишутся в следующем виде:

$$-x_1 - ix_2, \qquad -x_1 + ix_2, \qquad x_3.$$

Тогда на основе этого первичное представление этих компонент рядами в базисе обобщенных сферических функций запишется в виде:

$$-x_1 - ix_2 = \sum_{l=1}^{L}\sum_{n=-l}^{l} X_{1,l,n}\,T_{1n}^{l}, \qquad -x_1 + ix_2 = \sum_{l=1}^{L}\sum_{n=-l}^{l} X_{2,l,n}\,T_{-1n}^{l},$$

$$x_3 = \sum_{l=1}^{L}\sum_{n=-l}^{l} X_{3,l,n}\,T_{0n}^{l}.$$

Аналогичный подход применим и для σ, выраженного через потоки и силы X, J.

Энергетическое взаимодействие отдельных волн раздвигает спектральный интервал до $2L$ ($l = L$ – граница учитываемого спектрального интервала), что увеличивает сферу рассеяния. Однако, если L отделяет спектральный интервал до размеров атмосферного фронта, как это предложено в [3], то сфера рассеяния от интервала $l > L$ переходит в энергию фронтальной зоны в виде скрытой теплоты конденсации.

При триплетном взаимодействии волновых процессов согласно формуле (2) следует учесть, что левые нижние индексы обобщенных сферических функций результата представляют собой сумму индексов функций сомножителей. Т.е. результат представляет собой соседний тензорный компонент, полученный в спектре энергетических мод. Тензорные деформационные характеристики тоже являются следствием энергетических обменов.

Триплетное взаимодействие порождает весь комплекс тензорных компонент, хотя остальные триплетные взаимодействия не имеют той смысловой нагрузки, как взаимодействия с компонентой x_3.

Энергетическое взаимодействие любой компоненты векторного поля сил или потоков с компонентой x_3 оставляет результат в той же компоненте. Т.к. компонента x_3 определяет токи конвекции, то взаимодействие такого типа фактически равноценно, согласно [3, 9], действию гидродинамического давления и главного момента сил R, L на конвективные образования.

Однако все компоненты тензорного произведения нет смысла расшифровывать для расчета энтропии долговременного планетарного процесса. Кроме того, помимо компонент тензора второго ранга в виде самой деформационной перестройки имеет место понятие скорости производства деформационной перестройки текущего макропроцесса, которая описывается компонентами тензора третьего ранга, а также ускорения производства перестройки, определяемое тензором четвертого ранга. Но для общей картины эволюции климата этих характеристик достаточно, так как уточняют заблаговременность прогноза климатической перестройки, а сам факт перестройки может быть зафиксирован первичным анализом смысла самой деформации, которая происходит в стандартные сроки.

Поэтому остановимся на методе расчета скорости перестройки деформации в компонентах тензора второго ранга применительно к спектральному анализу уравнений прогноза тензора скоростей деформации и рассмотрим два подхода, на базе которых мы можем параметризовать потенциалы рассеяния Ψ, Φ и производство энтропии σ.

Подход 1

Запишем согласно [11] уравнения движения свободной атмосферы и уравнения притока тепла в тензорной форме записи:

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\bar{\mathbf{u}}_k \bar{\mathbf{u}}_j + \overline{\mathbf{u}'_k \mathbf{u}'_j}\right) = -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x_j} - \delta_{j3}\frac{g\bar{\Phi}}{\theta_0} - 2\omega \mathbf{u}_i,$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\bar{\mathbf{u}}_k\, \bar{\theta}_k + \bar{\mathbf{u}}'_k\, \bar{\theta}'_k\right) = 0,$$

где u_j – составляющая скорости вдоль оси j; θ_0 – стандартное значение потенциальной температуры (постоянная величина); Φ – геопотенциал; ω – угловая скорость вращения Земли; g – ускорение силы тяжести; δ_{ij} – символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & при \quad i \neq j \\ 1 & при \quad i = j \end{cases}.$$

Для корреляционных моментов 2-го при расчете производства энтропии $\boldsymbol{\sigma}$ имеем следующие уравнения:

$$\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\overline{\mathbf{u}}_k \overline{\mathbf{u}_i' \mathbf{u}_j'} + \overline{\mathbf{u}_k' \mathbf{u}_i' \mathbf{u}_j'}\right] + \frac{\partial \overline{\Phi' u_i'}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\Phi' u_j'}}{\partial x_i} = -\overline{\mathbf{u}_i' \mathbf{u}_k'}\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} - \overline{\mathbf{u}_j' \mathbf{u}_k'}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} -$$

$$-\frac{g}{\theta_0}\left(\delta_{i3}\overline{\mathbf{u}_j'\theta'} + \delta_{j3}\overline{\mathbf{u}_i'\theta'}\right) + \overline{\Phi'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)},$$

$$\frac{\partial \overline{u'\theta'}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\overline{\mathbf{u}}_k \overline{\mathbf{u}_i'\theta'} + \overline{\mathbf{u}_k'\mathbf{u}_i'\theta'}\right] + \frac{\partial \overline{\Phi'\theta'}}{\partial x_i} = -\overline{\mathbf{u}_i'\mathbf{u}_k'}\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} - \overline{\theta'\mathbf{u}_k'}\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} - \delta_{i3}\frac{g}{\theta_0}\overline{\theta'}^2 + \overline{\Phi'\frac{\partial \overline{\theta'}}{\partial x_i}};$$

$$\frac{\partial \overline{\theta}'^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\overline{\mathbf{u}}_k \overline{\theta'}^2 + \overline{\mathbf{u}_k'\theta'^2}\right] = -2\overline{\mathbf{u}_k'\theta'}\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k}.$$

Таким образом, получаем уравнения для всех корреляционных моментов, составляющих матрицу:

$$\begin{pmatrix} \overline{\mathbf{u}}_1'^2 & \overline{\mathbf{u}_1'\mathbf{u}_2'} & \overline{\mathbf{u}_1'\mathbf{u}_3'} & \overline{\mathbf{u}_1'\theta} \\ \overline{\mathbf{u}_2'\mathbf{u}_1'} & \overline{\mathbf{u}}_2'^2 & \overline{\mathbf{u}_2'\mathbf{u}_3'} & \overline{\mathbf{u}_2'\theta} \\ \overline{\mathbf{u}_3'\mathbf{u}_1'} & \overline{\mathbf{u}_3'\mathbf{u}_2'} & \overline{\mathbf{u}}_3'^2 & \overline{\mathbf{u}_3'\theta} \\ \overline{\theta\mathbf{u}_1'} & \overline{\theta\mathbf{u}_2'} & \overline{\theta\mathbf{u}_3'} & \overline{\theta}'^2 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

В этих уравнениях третьи моменты, являясь компонентами тензора третьего ранга, задают скорость деформационной перестройки, происходящей при трансформационном энергетическом обмене между волновыми субстанциями термодинамического континуума в тензоре деформации (3).

Подход 2

Спектральный анализ производства энтропии σ, выраженный через потоки $\mathbf{J}$, можно представить согласно [5] на примере системы уравнений, формирующих тензор деформации, и характеризующий трансформационный энергетический обмен:

$$\frac{\partial V_{l,n}}{\partial t} = -\left(\sum_{k=0}^{L}\sum_{s=-k}^{k} v_{k,s}T_{0s}^{k}\right)\sum_{l=0}^{L}\sum_{n=-l}^{l}\frac{\partial V_{l,n}}{\partial z}T_{1n}^{l} - \left(\sum_{k=0}^{L}\sum_{s=-k}^{k} V_{k,s}T_{1s}^{k}\right)\sum_{l=0}^{L}\sum_{n=-l}^{l} V_{l,n}\frac{\sqrt{l(l+1)}}{2a}v_{l,n}T_{0n}^{l} -$$

$$-\left(\sum_{k=0}^{L}\sum_{s=-k}^{k} U_{k,s}T_{-1s}^{k}\right)\sum_{l=0}^{L}\sum_{n=-l}^{l} V_{l,n}\frac{\sqrt{(l+2)(l11)}}{2a}T_{2n}^{l},$$

$$\frac{\partial U_{l,n}}{\partial t} = -\left(\sum_{k=0}^{L}\sum_{s=-k}^{k} v_{k,s}\, T_{0s}^{k}\right)\sum_{l=0}^{L}\sum_{n=-l}^{l}\frac{\partial U_{l,n}}{\partial z}T_{-1n}^{l} - \left(\sum_{k=0}^{L}\sum_{s=-k}^{k} V_{k,s} T_{1s}^{k}\right)\sum_{l=0}^{L}\sum_{n=-l}^{l} U_{l,n}\frac{\sqrt{(l+2)(l11)}}{2a}T_{-2n}^{l} -$$

$$-\left(\sum_{k=0}^{L}\sum_{s=-k}^{k} U_{k,s} T_{-1s}^{k}\right)\sum_{l=0}^{L}\sum_{n=-l}^{l} U_{l,n}\frac{\sqrt{l(l+1)}}{2a}T_{0n}^{l},$$

$$\frac{\partial v_{l,n}}{\partial t} = -\left(\sum_{k=0}^{L}\sum_{s=-k}^{k} v_{k,s}\, T_{0s}^{k}\right)\sum_{l=0}^{L}\sum_{n=-l}^{l}\frac{\partial v_{l,n}}{\partial z}T_{0n}^{l} - \left(\sum_{k=0}^{L}\sum_{s=-k}^{k} U_{k,s} T_{-1s}^{k}\right)\sum_{l=0}^{L}\sum_{n=-l}^{l}\frac{\sqrt{l(l+1)}}{2a}v_{l,n}T_{1n}^{l} -$$

$$-\left(\sum_{k=0}^{L}\sum_{s=-k}^{k} V_{k,s} T_{1s}^{k}\right)\sum_{l=0}^{L}\sum_{n=-l}^{l}\frac{\sqrt{l(l+1)}}{2a}v_{l,n}T_{-1n}^{l} - \left(\sum_{k=0}^{L}\sum_{s=-k}^{k} U_{k,s} T_{-1s}^{k}\right)\sum_{l=1}^{L}\sum_{n=-l}^{l} V_{l,n}T_{1n}^{l},$$

Применяя к этой системе формулу умножения обобщенных сферических функций (2), получим триплетные произведения в виде [10]:

$$T_{0s}^{k}T_{0n}^{l} = \sum_{v=|k-l|}^{k+l} C_{0,0,0}^{k,l,v}\, C_{s,n,s+n}^{k,l,v}\, T_{0,s+n}^{v}$$

$$T_{-1s}^{k}T_{1n}^{l} = \sum_{v=|k-l|}^{k+l} C_{-1,1,0}^{k,l,v}\, C_{s,n,s+n}^{k,l,v}\, T_{0,s+n}^{v}$$

$$T_{1s}^{k}T_{-1n}^{l} = \sum_{v=|k-l|}^{k+l} C_{1,-1,0}^{k,l,v}\, C_{s,n,s+n}^{k,l,v}\, T_{0,s+n}^{v}$$

$$T_{0s}^{k}T_{1n}^{l} = \sum_{v=|k-l|}^{k+l} C_{0,1,1}^{k,l,v}\, C_{s,n,s+n}^{k,l,v}\, T_{1,s+n}^{v}$$

$$T_{1s}^{k}T_{0n}^{l} = \sum_{v=|k-l|}^{k+l} C_{1,0,1}^{k,l,v}\, C_{s,n,s+n}^{k,l,v}\, T_{1,s+n}^{v}$$

$$T_{-1s}^{k}T_{2n}^{l} = \sum_{v=|k-l|}^{k+l} C_{-1,2,1}^{k,l,v}\, C_{s,n,s+n}^{k,l,v}\, T_{1,s+n}^{v}$$

$$T_{0s}^{k}T_{-1n}^{l} = \sum_{v=|k-l|}^{k+l} C_{0,-1,-1}^{k,l,v}\, C_{s,n,s+n}^{k,l,v}\, T_{-1,s+n}^{v}$$

$$T_{-1s}^{k}T_{0n}^{l} = \sum_{v=|k-l|}^{k+l} C_{-1,0,-1}^{k,l,v}\, C_{s,n,s+n}^{k,l,v}\, T_{-1,s+n}^{v}$$

$$T_{1s}^{k}T_{-2n}^{l}=\sum_{\nu=|k-l|}^{k+l}C_{1,-2,-1}^{k,l,\nu}\,C_{s,n,s+n}^{k,l,\nu}\,T_{-1,s+n}^{\nu}\,.$$

Таким образом, триплетные произведения приводят к возникновению серий волновых колебаний в тензорной компоненте, являющейся соответствующим результатом произведения компонент векторов.

Результирующая система уравнений для описания трансформации энергии по спектральным модам тензора деформации тогда будет:

$$\frac{\partial V_{l,n}}{\partial t}=-\sum_{k=1}^{L}\sum_{s=-k}^{k}\sum_{q=1}^{L}\sum_{j=-q}^{q}\sigma\left[\begin{array}{l}C_{0,1,1}^{k,q,l}\,v_{k,s}\,\dfrac{\partial V_{q,j}}{\partial z}+C_{1,0,1}^{k,q,l}\,\dfrac{\sqrt{q(q+1)}}{2a}V_{k,s}V_{q,j}+\\+C_{-1,2,1}^{k,q,l}\,\dfrac{\sqrt{q(q+1)}}{2a}U_{k,s}V_{q,j}\end{array}\right],$$

$$\frac{\partial U_{l,n}}{\partial t}=-\sum_{k=1}^{L}\sum_{s=-k}^{k}\sum_{q=1}^{L}\sum_{j=-q}^{q}\sigma\left[\begin{array}{l}C_{-1,0,-1}^{k,q,l}\,v_{k,s}\,\dfrac{\partial U_{q,j}}{\partial z}+C_{1,-2,-1}^{k,q,l}\,\dfrac{\sqrt{q(q+1)}}{2a}V_{k,s}U_{q,j}+\\+C_{-1,0,-1}^{k,q,l}\,\dfrac{\sqrt{q(q+1)}}{2a}U_{k,s}U_{q,j}\end{array}\right],$$

$$\frac{\partial v_{l,n}}{\partial t}=-\sum_{k=1}^{L}\sum_{s=-k}^{k}\sum_{q=1}^{L}\sum_{j=-q}^{q}\sigma\left[\begin{array}{l}C_{0,0,0}^{k,q,l}\,v_{k,s}\,\dfrac{\partial v_{q,j}}{\partial z}+C_{-1,1,0}^{k,q,l}\,\dfrac{\sqrt{q(q+1)}}{2a}U_{k,s}v_{q,j}+\\+C_{1,-1,0}^{k,q,l}\,\dfrac{\sqrt{q(q+1)}}{2a}V_{k,s}v_{q,j}+\dfrac{1}{a}C_{-1,1,0}^{k,q,l}U_{k,s}V_{q,j}\end{array}\right],\quad(4)$$

где

$$\sigma=\begin{cases}c_{s,j,s+j}^{k,q,l} & \textit{при}\;\; \nu=l,\; s+j=n,\; |k-q|\le l\le k+q,\; l\le L\\ 0 & \textit{при}\;\; \nu\ne l,\quad s+j\ne n,\quad l<|k-q|,\quad l>L\end{cases},$$

a – радиус Земли; v_z – вертикальная скорость; V,U – компоненты вектора скорости, инвариантные относительно вращения.

$$V=-v_{\varphi}-iv_{\theta}=\sum_{l=1}^{L}\sum_{n=-l}^{l}V_{l,n}T_{1n}^{l}\,,\qquad U=-v_{\varphi}+iv_{\theta}=\sum_{l=1}^{L}\sum_{n=-l}^{l}U_{l,n}T_{1n}^{l}\,,$$

$$v_z=\sum_{l=0}^{L}\sum_{n=-l}^{l}v_{l,n}T_{0n}^{l}\,,$$

где v_φ, v_θ – компоненты вектора скорости в сферической системе координат.

Расчет трансформации по спектру сферических волн, выполненный по системе (4), дает оценку потокам $\mathbf{J}$, а затем и соответствующему им вектору сил $\mathbf{X}$. Это позволяет провести расчет величины производства энтропии и потенциалов рассеяния.

Выводы

Процесс трансформации энергии по спектру волн позволяет оценить вклад в энтропию процессов «отрицательной» вязкости и тем самым определить тенденцию к уменьшению энтропии и, как следствие, тенденции перестройки климата.

Переход к тензору (3) позволяет одновременно с динамическими компонентами деформации рассматривать вклад термических компонент, что более детально учитывает явления конвективной теплопроводности.

Связь спектров сферических волн с элементами комплексного потенциала скорости позволяет уточнить локальное энергетическое проявление каждой сферической гармоники с мультиполями комплексного потенциала скорости.

* *

Висвітлено теоретичні основи другого початку термодинаміки стосовно кліматоутворюючих процесів в планетарній атмосфері. Відмінності планетарних процесів від молекулярних істотно змінюють принцип другого початку термодинаміки і розглядають поняття ентропії як функції організації перебудов клімату.

* *

1. *Pauluis O., I. M. Held*. Entropy Budget of an Radiative-convective equilibrium. Part I: Maximum work and frictional dissipation. J. Atmos. Sci., 59, - 2002. – P. 125-139.
2. *Pauluis O., I. M. Held.* Entropy Budget of an Radiative-convective equilibrium. Part II: Latent heat transport and moist processes. J. Atmos. Sci., 59, - 2002. – P. 140-149.
3. *Белый Т.А*. Топологический нерв в термодинамическом континууме планетарной атмосферы // Геофиз. журнал. – 27. – № 5. – 2005. - С. 867–873.

4. *Дьярмати И*. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. – М.: МИР, 1974. – 304 с.
5. *Ефимов В.А*. Математическое моделирование долговременных нестационарных планетарных процессов в системе океан – атмосфера // Тр. Аркт. и антаркт. н.-и. ин-та. – 1976. – 336. – 275 с.
6. *Ефимов В.А*. Гидродинамический метод прогноза на декаду и месяц. Развитие самообучающихся систем прогноза // Тр. ГМЦ СССР. – 1987. – Вып. 285. – С. 3–94.
7. *Белый Т.А*. Спектральный аналог локального баланса энтропии планетарной атмосферы // Геофиз. журн. – 2005. – **28**, № 3. – С. 122-127.
8. Нелинейные системы гидродинамического типа // Под ред. *А.М.Обухова*. – М.: Наука, 1974. – 160 с.
9. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В*. Теоретическая гидромеханика, – М.: ГИТТЛ, 1948. – Т. 1. – 487 с.
10. *Ефимова Г.И*. Спектральная параметризация уравнений прогноза тензора макромасштабной турбулентности // Тр. ГМЦ СССР. – 1987. – Вып. 285. – С. 95–134.
11. Теоретические основы прогноза погоды на средние сроки. – Л.: Гидрометеоиздат, 1979. – 138 с.

Одесский государственный экологический университет